On graphs associated with the Griess algerbas of VOAs(Group Theory and Related Topics)

AUTHOR(S):

島倉, 裕樹

数理解析研究所講究録
第1564巻 2007年 112-118

On graphs associated with the Griess algebras of VOAs

島倉 裕樹 (Hiroki Shimakura)

北海道大学大学院理学研究院
Department of Mathematics, Hokkaido University
Kita 10, Nishi 8, Kita-Ku, Sapporo, Hokkaido, 060-0810, Japan.
e-mail: shimakura@math.sci.hokudai.ac.jp

1 序

頂点作用素代数 (VOA) の自己同型群の研究において, その構造の決定は基本的な問題の一つである. 本稿では有限可換自己同型群の正規化群の構造の決定法としてグラフの利用を提案する. 特に有限単純群に付随するグラフが現れる例を二つ紹介する.

2 可換代数と有限可換自己同型群に付随するグラフ

ここでは一般の可換代数とその有限可換自己同型群に付随するグラフを定義する.

R を $\mathbb{C}$ 上[1] の有限次元可換代数として, A を R の有限可換自己同型群[2]とする. このとき R の A による固有空間分解を考える: $R=\oplus_{\mathrm{Irr}(A)}R_\chi$, ただし $\mathrm{Irr}(A)$ は A の既約指標全体を表し, R_χ は指標 χ を持つ固有空間を表すことにする. このとき次のグラフ $\Gamma(R,A)$ を考える[3]:

$$\begin{array}{rc} \text{頂点}: & R_\chi\ (R_\chi\neq 0), \\ \text{辺}: & R_\chi \circ\!-\!\circ R_{\chi'} \Leftrightarrow R_\chi R_{\chi'}\neq 0. \end{array}$$

可換代数を考えているので向きのないグラフになる.[4] また, A の R の全自己同型群 $\mathrm{Aut}(R)$ における正規化群 $N_{\mathrm{Aut}(R)}(A)$ は頂点集合へ置換群として作用する. 積構造によって辺が定義されていることから, 特にグラフの自己同型群として作用する. A は明らかに全ての頂点を固定することから, 群準同型 $N_{\mathrm{Aut}(R)}(A)/A\to\mathrm{Aut}(\Gamma(R,A))$ が得られる.

一般には, 固有空間の直和として得られる R の部分空間 $U=\oplus_{\chi\in X}R_\chi$ に付随する部分グラフ $\Gamma(U,A)$ を考えられる. 特に U として既約 $N_{\mathrm{Aut}(R)}(A)$-加群をとると次がわかる.

[1]固有空間分解が出来れば他の体でも構わない. 例えば, A が基本可換 2-群なら $\mathbb{R}$ 上でもよい.
[2]可換でなくても定義は出来る. しかし, 分解の様子が複雑となり, 良い対称性が見難くなるように思う.
[3]この定義で筆者の目的は達成された. しかし, 最良の定義か議論の余地があるように思われる.
[4]正確には $xy\neq 0\Leftrightarrow yx\neq 0$ なら良いが, 可換であるグライス代数を考えるので, 簡単のため可換とした.

補題 2.1. U を既約 $N_{\mathrm{Aut}(R)}(A)$-加群とする．すると $N_{\mathrm{Aut}(R)}(A)/A$ の $\Gamma(U,A)$ への作用は可移となる．さらに，$\{R_\chi |\ \chi \in X\}$ の各空間の次元は一定となる．

証明. $N_{\mathrm{Aut}(R)}(A)/A$ の $\Gamma(U,A)$ への作用における軌道は加群を作るので，仮定から可移となる．また，$d \in \mathbb{Z}$ に対して $\{R_\chi |\ \dim R_\chi = d\}$ は $N_{\mathrm{Aut}(R)}(A)/A$ の作用で保たれるので，仮定から次元は一定でなければならない． □

3 グライス代数と有限可換自己同型群に付随するグラフ

本稿で扱う VOA V は $V_0 = \mathbb{C}1$ かつ $V_1 = 0$ を満たすものである.[5] このとき V_2 には 1-積によって可換 (非結合) 代数構造が定義され，3-積を用いて不変内積が定義される．この代数はグライス代数と呼ばれる．ω を V のヴィラソロ元とし，$B(V)$ で ω の直交補空間 $\omega^\perp$ を表すことにする．$B(V)$ に付随するグラフが "良い" 性質を持つ例として次の二つがある.[6]

命題 3.1. BW_{16} を階数 16 の *Barnes-Wall* 格子とする．$V^+_{\mathrm{BW}_{16}}$ を格子 *VOA* $V_{\mathrm{BW}_{16}}$ の $-1 \in \mathrm{Aut}(\mathrm{BW}_{16})$ の持ち上げの固定点として得られる部分 *VOA* とする．このとき，グラフ $\Gamma(B(V^+_{\mathrm{BW}_{16}}), O_2(\mathrm{Aut}(V^+_{\mathrm{BW}_{16}})))$ は頂点数 2295 の直径 2 の *distance-transitive* グラフになる．

定理 3.2. BW_{32} を階数 32 の *Barnes-Wall* 格子とする．V を $V^+_{\mathrm{BW}_{32}}$ の単純カレント拡大 $V^+_{\mathrm{BW}_{32}} \oplus V^{T,+}_{\mathrm{BW}_{32}}$ として得られる *VOA* とする．$\mathrm{Aut}(V)$ に含まれる部分群 $K \cong 2^{27}.E_6(2)$ に対して，$\Gamma(B(V), O_2(K))$ は頂点数 139503 の直径 2 の *distance-transitive* グラフになる．

以後の章でこれら二つの VOA と付随するグラフについて解説をする．

注意 3.3. (1) 命題 *3.1* のグラフは直交群 $\Omega^+(10,2)$ の指数 2295 の極大部分群 $2^{10}:L_5(2)$ による剰余に定義される剰余グラフに同型となる．これは *half dual polar graph* と呼ばれる 10 次元直交空間の極大全等方部分空間全体上に定義されるグラフと同型．

(2) 定理 *3.2* のグラフは有限単純群 $E_6(2)$ の指数 139503 の極大部分群 $2^{16}:\Omega^+(10,2)$ による剰余に定義される剰余グラフと同型となる．

4 階数 16 の Barnes-Wall 格子に付随する VOA

この章では階数 16 の Barnes-Wall 格子 BW_{16} に付随する VOA $V = V^+_{\mathrm{BW}_{16}}$ について考察する．

[5] 頂点作用素代数の定義は [Bo86, FLM88] を参照にされたい．
[6] 筆者は現在，良い例をこの二つしか知らない．

この VOA の自己同型群は [Sh04, Sh06] における VOA V_L^+ の自己同型群の研究の一例として決定されており, $2^{16}.\Omega^+(10,2)$ という構造を持つことが示されている.[7] そこで, $\mathrm{Aut}(V)$ の極大正規 2-部分群を A とおき, グラフ $\Gamma=\Gamma(B(V),A)$ を考える. A は $\mathrm{Aut}(V)$ の正規部分群であるので, $\mathrm{Aut}(V)/A$ が Γ へ作用する. さらに $\mathrm{Aut}(V)/A$ は単純群であるので, この作用は忠実である.

補題 4.1. (1) $\mathrm{Aut}(V)$ の $B(V)$ への作用は既約である.

(2) $\dim B_\chi=1$ となる $\chi\in A^*$ が存在する.

証明. 自己同型群は既に分かっているので、直接計算で (1) は示せる. また (2) については A の具体的な記述を用いて, 実際にグライス代数の中でそのような元を見つける. □

したがって $\mathrm{Aut}(V)/A$ の Γ への作用は可移であり, 頂点数は 2295 である. このグラフ Γ については $\Omega^+(10,2)$ が可移に作用するということから, その構造が決まってしまう. このことを説明しよう. 単純群 $\Omega^+(10,2)$ の極大部分群の分類から, $\mathrm{Aut}(V)/A$ の Γ への作用の 1 点固定部分群が $2^{10}:L_5(2)$ と同型にならざるを得なくなる. よって Γ の頂点と剰余 $\Omega^+(10,2)/(2^{10}:L_5(2))$ の間に一対一対応がある. 剰余 $\Omega^+(10,2)/(2^{10}:L_5(2))$ には剰余グラフという $\Omega^+(10,2)$ が distance-transitive に作用する構造が入るため[8], Γ は剰余グラフになる. したがって, 命題 3.1 が成り立つ.

このグラフにおいては全自己同型群が既に分かっていたので, 群論的な情報からグラフの構造が容易に決定できた. 次の章ではグラフを利用して自己同型群の構造を調べた例を紹介する.

5 階数 32 の Barnes-Wall 格子に付随する VOA

この章では階数 32 の Barnes-Wall 格子 BW_{32} に付随する VOA $V_{\mathrm{BW}_{32}}^+$ の単純カレント拡大として得られる VOA $V=V_{\mathrm{BW}_{32}}^+\oplus V_{\mathrm{BW}_{32}}^{T,+}$ について考える. VOA 構造が入ることは [Hu96] や [Mi] 等を参照されたい.[9]

この VOA の自己同型群については Griess や北詰正顕氏らによる考察がある. それについて簡単に述べよう. z を $V_{\mathrm{BW}_{32}}^+$ 上 1, $V_{\mathrm{BW}_{32}}^{T,+}$ 上 -1 として作用する自己同型としたときに, その中心化群 $C_{\mathrm{Aut}(V)}(z)$ は $2^{1+32}.(2^{10}:\Omega^+(10,2))$ であることが [Mi] で示されている.[10] また [Mi] において ($\mathbb{R}$ 上で考えた時に) $\mathrm{Aut}(V)$ が有限群になることが示されてい

[7]特に V_L^+ の中で格子 VOA V_L の自己同型群から誘導される部分群と比較して良い対称性を持つ VOA が $V_{\sqrt{2}E_8}^+$ と $V_{\mathrm{BW}_{16}}^+$ の二つである.

[8]正確には自明なグラフ構造を除くと 2 通りの構造があり, それらは互いに補グラフとなる. valency を見ればどちらかはすぐにわかる.

[9][Mi] では $\mathbb{R}$ 上で正定値不変双線形形式を持つ枠付き VOA として構成されている.

[10][Sh04] の結果を用いても示せる.

る．対合の中心化群の構造から $\mathrm{Aut}(V) \cong 2^{27}.E_6(2)$ と予想されていた.[11] 実際にこの予想は $\mathbb{R}$ 上で考えた場合に[12]肯定的に解決している [Sh]．その際に $E_6(2)$ という群構造を決定する上で重要な役割を果たしたのが今回紹介するグラフである．

5.1 位数 2^{27} の基本可換 2-群

この節ではグラフを定義するのに必要な位数 2^{27} の基本可換 2-群となる自己同型群を見つける．

まず BW_{32} は $\mathrm{BW}_{16} \oplus \mathrm{BW}_{16}$ を含むことを注意しておく．よって V は部分 VOA $V(0) = V^+_{\mathrm{BW}_{16}} \otimes V^+_{\mathrm{BW}_{16}}$ を含む．V を $V(0)$ の拡大としてみてやると $E \cong 2^{10}$ で次数付けされた単純カレント拡大となることがわかる．したがって，$E^* \cong 2^{10}$ が $\mathrm{Aut}(V)$ の部分群となっている．[Sh04] で $\mathrm{Aut}(V^+_{\mathrm{BW}_{16}})$ は決定されており，よって $\mathrm{Aut}(V(0)) = \mathrm{Aut}(V^+_{\mathrm{BW}_{16}}) \wr \mathbb{Z}_2$ となることが分かる．[Sh04, Sh06] の結果から $N_{\mathrm{Aut}(V)}(E^*)$ は $\mathrm{Aut}(V(0))$ の部分群を用いて記述され，特に $N_{\mathrm{Aut}(V)}(E^*) \cong 2^{10}.(2^{16} \times 2^{16}).\Omega^+(10,2) : \langle \mu \rangle$ となる．ただし，μ は $V(0)$ の左成分と右成分を入れ替える自己同型を V へ延ばした位数 2 の自己同型である．ここで，二つ $2^{10}.2^{16}$ という形の部分群は同型であるので，$2^{16} \times 2^{16}$ の対角成分を考えることで，$2^{10}.(2^{16} \times 2^{16})$ は位数 2^{26} の基本可換 2-群 $\bar{A}$ を含むことがわかる．さらに μ が $\bar{A}$ と可換であるので，ゆえに $A = \langle \bar{A}, \mu \rangle$ は位数 2^{27} の基本可換 2-群である．後に使う A の指標 χ_0 を $\chi_0(a) = 1, a \in \bar{A}, \chi_0(\mu) = -1$ と定義しておく．

また A は $C_{\mathrm{Aut}(V)}(z)$ の部分群になることもわかり，次の補題が直接確かめられる．

補題 5.1. (1) A は $N_{\mathrm{Aut}(V)}(E^*)$, $C_{\mathrm{Aut}(V)}(z)$ の正規部分群である．特に $N_{\mathrm{Aut}(V)}(E^*)$, $C_{\mathrm{Aut}(V)}(z) \subset N_{\mathrm{Aut}(V)}(A)$．

(2) $B(V)$ は $\langle N_{\mathrm{Aut}(V)}(E^*), C_{\mathrm{Aut}(V)}(z) \rangle$ の作用で既約となる．特に $N_{\mathrm{Aut}(V)}(A)$ 加群として既約である．

5.2 グラフの性質

この節ではグラフ $\Gamma(B(V), A)$ の性質を調べる．

まず，部分 VOA $V(0) = V^+_{\mathrm{BW}_{16}} \otimes V^+_{\mathrm{BW}_{16}}$ の部分 VOA $V^+_{\mathrm{BW}_{16}} \otimes \mathbf{1}$ と $\mathbf{1} \otimes V^+_{\mathrm{BW}_{16}}$ のヴィラソロ元をそれぞれ ω_l, ω_r と置く．すると A の具体的な作用を見ることで次の補題を得る．

補題 5.2. (1) $B_{\chi_0} = \mathbb{C}(\omega_l - \omega_r)$．

また，補題 5.1 を用いることで次を得る．

---

[11] この予想を筆者は 2002 年頃に北詰正顕氏から聞いていた．その後，2004 年のエジンバラの集会で Griess が講演の中で同様の予想を述べていた．この予想の解決がこの VOA の研究目標であった．

[12] $\mathbb{C}$ 上の場合は「$\mathrm{Aut}(V)$ が有限群」という主張が示せていない．これが解決されれば $\mathbb{C}$ 上でも同じ群になることが示せる．

補題 5.3. $\Gamma(B(V), A)$ の頂点の個数は 139503 であり, $N_{\mathrm{Aut}(V)}(A)$ が可移に作用する.

またグラフの性質として次が得られる.

命題 5.4. (1) Γ の直径は 2 である. さらに詳しく言うと, $B_\chi \in \Gamma$ に対して, $d(B_{\chi_0}, B_\chi) \leq 1$ となるための必要十分条件は $B_\chi \subset V(0)$ であり, $d(B_{\chi_0}, B_\chi) = 2$ となるための必要十分条件が $B_\chi \not\subset V(0)$ である.

(2) $N_{\mathrm{Aut}(A)}(A)$ の Γ への作用における B_{χ_0} の固定部分群は $N_{\mathrm{Aut}(V)}(E^*)$ である.

(3) $N_{\mathrm{Aut}(V)}(E^*)$ は B_{χ_0} からの距離 1 と 2 の集合へそれぞれ可移に作用する.

証明. (1) はグライス代数の計算を直接行うことで示せる. その計算において鍵となるのは, B_χ を張る元が $B_\chi \subset V(0)$ の時には $v \otimes 1 \pm 1 \otimes v$ という形であり, $B_\chi \not\subset V(0)$ の時には $u \otimes u$ の形であることである.

(2) において $N_{\mathrm{Aut}(V)}(E^*)$ が B_{χ_0} を保つ事は直接計算からわかる. 逆に, B_{χ_0} を固定する元 g は距離 1 の集合も保つので, $V(0)$ のグライス代数を保つ. $V(0)$ はグライス代数である $V(0)_2$ から VOA として生成されるので, $g(V(0)) = V(0)$ となる. V の $V(0)$ 加群としての分解が一意であることから g は E に作用する. すなわち $g \in N_{\mathrm{Aut}(V)}(E^*)$ となる.

(3) は (2) で決定した固定部分群の作用を直接見て示すことになる. □

この命題から $N_{\mathrm{Aut}(V)}(A)/A$ は Γ へ階数 3 の置換群として作用していることがわかる. そこで, 階数 3 の原始置換群の分類[13]を用いると (cf. [Lie87]), $N_{\mathrm{Aut}(A)}(A)/A \cong E_6(2)$ となることがわかる. したがって, $N_{\mathrm{Aut}(A)}(A) \cong 2^{27}.E_6(2)$ を得る.

これらをまとめることで定理 3.2 を得る. さらに, $\mathrm{Aut}(V)$ が有限群であれば, 中心加群や正規化群の構造から (有限単純群の分類を用いるなど) 群論的な議論を用いて A が $\mathrm{Aut}(V)$ の正規部分群であることが示せる. これにより $\mathrm{Aut}(V)$ が決定されるのである.

6 ”良い”グラフが現れる VOA に関する観察

筆者が知っている良いグラフを持つ例は今までに紹介した二つのみであるが, これら VOA の自己同型群は大きな対称性を持っている. このことはある”良い”クラスの VOA には ”良い” グラフが現れるのではないかと期待させる. しかしながら, 現状では例が不足しており一般論が論じられる段階にないと思われる. よって ”良い” グラフを持つ VOA を探し出すことが当面の課題である. そのために, これら二つの例に共通する性質から関連ある性質の予想を試みる. ここで述べることは全く理論的に確立されておらず, 研究する一つの方向として見てもらいたい.

[13] この証明には有限単純群の分類が用いられている.

6.1 of class S^6

いままでに述べた二つの VOA は of class S^6 という性質[14]を持つことが予想されている ([Ma01]) [15]. of class S^6 である, または予想されている VOA は他にもいくつかある[16]. その中で $V^+_{\mathrm{BW}_{32}} \oplus V^{T,+}_{\mathrm{BW}_{32}}$ と $V^+_{\mathrm{BW}_{16}}$ は of class S^6 (と予想され) かつ全自己同型群 $\mathrm{Aut}(V)$ を $O_2(\mathrm{Aut}(V))$ で割った群が有限単純群であり, $O_2(\mathrm{Aut}(V))$ は (自明でない) 基本可換 2-群となる VOA である. 今のところ of class S^6 という性質とグラフの性質との関連性は全くわかっていないが, 面白いことが起こっていることが期待される.

6.2 他の関連

[BCN89] の p334 では $\Omega^+(10,2)$ に付随するグラフは $D_{5,5} = D_{5,4}$, $E_6(2)$ に付随するグラフは $E_{6,1} = E_{6,6}$ という Chevalley 群から得られる Lie 型のグラフとなることが書かれている. 全く根拠のないことだが, これらのグラフは exceptianl series の一部として現れることがいえると非常に面白いことだと思う. 筆者はグラフ $D_{4,4}$ に対応する VOA を探そうと試みたが成功していない.

また, 今まで紹介した例は Barnes-Wall 格子と関連あるものであった. Barnes-Wall 格子は階数が 2 冪のところに存在する格子である. ゆえに, 階数 32 の次である階数 64 の Barnes-Wall 格子に付随する VOA からこの種のグラフに関連する VOA が作る可能性がある. この方向でも研究を続けてみたい.

参考文献

[Bo86] R.E. Borcherds, Vertex algebras, Kac-Moody algebras, and the Monster, *Proc. Nat'l. Acad. Sci. U.S.A,* **83** (1986), 3068–3071.

[BCN89] A.E. Brouwer, A.M. Cohen and A. Neumaier, Distance-Regular Graphs, Springer Verlag, Berlin, 1989.

[FLM88] I. Frenkel, J. Lepowsky and A. Meurman, Vertex operator algebras and the Monster, Pure and Appl. Math., Vol.134, Academic Press, Boston, 1988.

---

[14] VOA V が of class S^n というのは V_ω をヴィラソロ元 ω が生成する部分 VOA としたときに, $\mathrm{Aut}(V)$ が $V_n/(V_\omega)_n$ へ固定点なしで作用することをいう.

[15] [Ma01] で, 中心電荷が半整数の場合に of class S^6 になるためのグライス代数の次元, 中心電荷, イジング元の随伴作用における固有空間の次元の必要条件が与えられている.

[16] 条件を満たす知られている VOA は $V^+_{\sqrt{2}E_8}$, $V^+_{\mathrm{BW}_{16}}$, $VB^\natural$, $V^\natural$, $V^+_{\mathrm{BW}_{32}} \oplus V^{T,+}_{\mathrm{BW}_{32}}$ の 5 つであり, 自己同型群はそれぞれ $O^+(10,2)$, $2^{16}\cdot\Omega^+(10,2)$, $\mathbb{B}$, $\mathbb{M}$, $2^{27}.E_6(2)$ である. $V^\natural$ は of class S^{11} であり, $VB^\natural$ が of class S^7 であるが, 他の VOA に対しては確認されていない.

[Hu96] Y. Huang, A nonmeromorphic extension of the moonshine module vertex operator algebra, *Contemp. Math.* (1996), 123–148.

[Lie87] M.W. Liebeck, The affine permutation groups of rank three, *Proc. London Math. Soc. (3)* **54** (1987), 477–516.

[Ma01] A. Matsuo, Norton's trace formulae for the Griess algebra of a vertex operator algebra with larger symmetry, *Comm. Math. Phys.* **224** (2001), 565–591.

[Mi] M. Miyamoto, Automorphism groups of $\mathbb{Z}_2$-orbifold VOAs, unpublished.

[Sh04] H. Shimakura, The automorphism group of the vertex operator algebra V_L^+ for an even lattice L without roots, *J. Algebra* **280** (2004), 29–57.

[Sh06] H. Shimakura, The automorphism groups of the vertex operator algebras V_L^+: general case, *Math. Z.* **252** (2006), 849–862.

[Sh] H. Shimakura, The automorphism group of the vertex operator algebra associated with the Barnes-Wall lattice of rank 32, in preperation.